4. Найти индексы плоскости, отсекающей на координатных осях отрезки:

1; 2; 3. 2; 1; 4. 1; ∞ ; 2. 3; —1; 5. —2; 1; 3....

5. Показать плоскости с индексами (110), (101), (010), (111), $(1\bar{1}1)$, (211), (121), (210), (013), ...

Кординатные оси выбрать одной из следующих сингоний: ромбической, тетрагональной, кубической, гексагональной.

6. Определить (в буквенной форме) межплоскостное расстояние для плоскостей (001), (110), (101), (111), (210), (211), ... в решетке следующих сингоний: кубической, тетрагональной, гексагональной, ромбической.

7. Изобразить в кубической сингонии плоскость с произвольно взятыми индексами и направление с индексами, численно равными индексам данной плоскости.

8. Найти две-три плоскости, входящие в данную зону, если дана одна из следующих осей зон: [001], [110], [101], [111]...

9. Выписать индексы всех плоскостей, входящих в кубической сингонии в одну из совокупностей: {100}, {110}, {111}, {210}, {211}, {310}, {123}.

Определить число этих плоскостей p.

Определить, на сколько совокупностей разобьется данная совокупность в случае тетрагональной, ромбической или гексагональной сингоний. Каковы индексы плоскостей, входящих в каждую из этих совокупностей, и каково их число.

10. Найти индексы плоскости (hkl), в которой находятся направления [113] и [....].

11. Найти индексы направления, проходящего через узлы [[...]] и [[...]].

12. Найти индексы направления, по которому пересекаются плоскости (...) и (...).

13. Найти индексы плоскости, в которой расположены узлы [[....]] [[...]] и [[...]].

14. Какова плотность заполнения в простой гексагональной и простой ромбоэдрической упаковке?

15. Показать, какие направления в решетках средних систем останутся перпендикулярными плоскостям с численно равными индексами.

15. Показать графически, что в ромбической системе возможны решетки C и F, но невозможны решетки, центрированные одновременно по двум парам граней.

Отчет по работе должен содержать ответы на вопросы, поставленные в задании, с необходимыми зарисовками и расчетами.

РАБОТА 46

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Для решения ряда задач кристаллографии и структурного анализа необходимо наглядное изображение симметрии кристалла и его ориентировки. Способ изображения должен передавать угловые соотношения между узловыми плоскостями и направлениями в решетке кристалла, а также давать возможность проводить количественные расчеты этих соотношений.

Такое наглядное изображение достигается с помощью различного рода проекций, общий принцип построения которых заключается в том, что вместо ребер и граней кристалла или вместо плоскостей и направлений в решетке рассматривают следы их пересечения со сферой или плоскостью. При этом кристалл заменяют кристаллическим или чаще полярным комплексом. Таким образом, проекции изображают не сам кристалл, а его комплекс.

Под кристаллическим комплексом понимают совокупность плоскостей и направлений, параллельных плоскостям и направлениям кристалла (решетки) и проходящих через одну точку — центр комплекса.

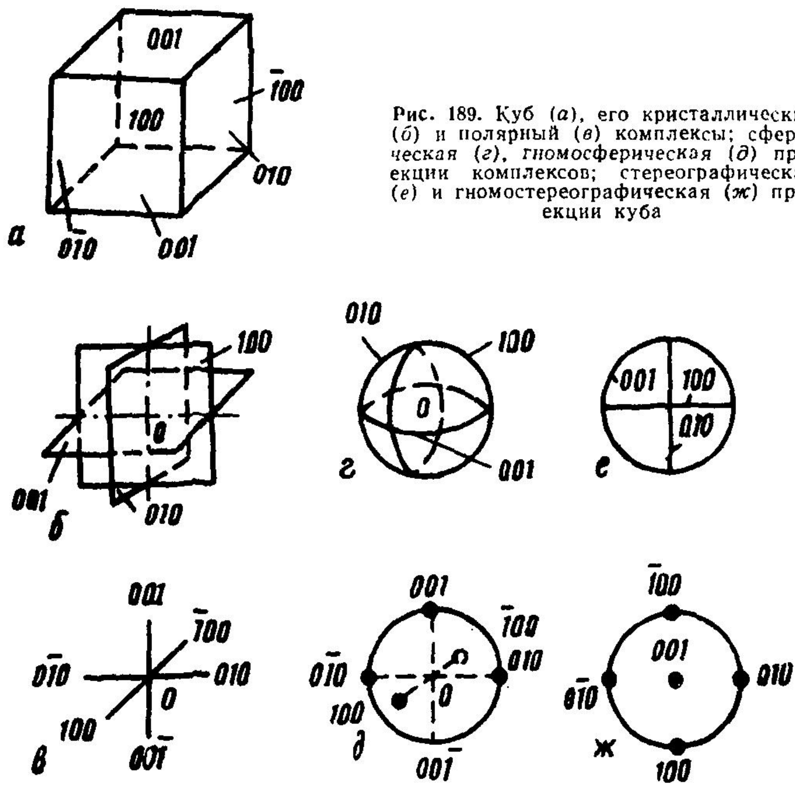


Рис. 189. Куб (*а*), его кристаллический (*б*) и полярный (*в*) комплексы; сферическая (*г*), гномосферическая (*д*) проекции комплексов; стереографическая (*е*) и гномостереографическая (*ж*) проекции куба

Если плоскости заменить нормалями к ним, получим полярный комплекс.

Ясно, что при таком переходе от кристалла к комплексу угловые соотношения не изменяются.

На рис. 189, *а* изображены грани куба и соответствующие им кристаллический (рис. 189, *б*) и полярный (рис. 189, *в*) комплексы.

Если поместить кристаллический (полярный) комплекс в центр сферы — точку *O* (рис. 189, *г* и *д*) произвольного радиуса — так называемой *сферы проекций* — и продолжать его до пересечения элементов комплекса со сферой, то следы этого пересечения образуют объемную сферическую проекцию.

На рис. 189, *г*, *д* показаны сферические проекции граней куба при использовании кристаллических и полярных комплексов.

Грани куба пересекаются со сферой по трем взаимно перпендикулярным большим кругам сферы. Нормали к этим граням пересекают сферу в шести точках, называемых полюсами, также отстоящих друг от друга на 90°.

Однако для практических целей объемная проекция мало пригодна. Более удобной является плоская стереографическая проекция. Ее получают с помощью той же сферической проекции.

Кристаллический (полярный) комплекс по-прежнему помещают в центр сферы произвольного радиуса — точку O, которую называют *центром проекций*.

Сферу проекции рассекают горизонтальной плоскостью, проходящей через центр проекций — так называемой плоскостью проекций Q (рис. 190). Большой круг, который находится в этом сечении сферы проекции, называют *кругом проекций*. На нем и строят стереографическую проекцию.

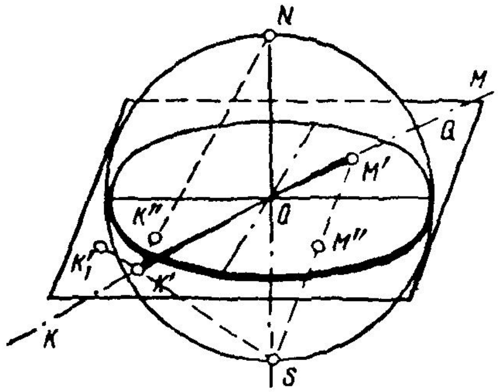


Рис. 190. Стереографическая проекция направления

Вертикальный диаметр сферы проекций NS, перпендикулярный к плоскости проекций Q, называют *осью проекций*.

Ось проекций пересекает сферу проекций в двух точках, так называемых *точках зрения*. При построении проекций пользуются обычно одной — нижней точкой зрения (S).

Для получения стереографической проекции произвольного направления OM предварительно получают его сферическую проекцию — точку M' (см. рис. 90), затем соединяют эту точку с точкой зрения прямой $M'S$, которую называют *лучом зрения*. Точка M'', полученная при пересечении луча зрения с кругом проекций, и представляет собой стереографическую проекцию направления OM.

Таким образом, стереографические проекции направлений изображаются точками.

Ясно, что стереографические проекции любых направлений, пересекающих сферу проекций в ее верхней половине, будут располагаться внутри круга проекций. Что касается стереографических проекций направлений, пересекающих сферу в нижней части, то они будут лежать за пределами круга проекций. Чем ниже точка располагается на сфере, тем дальше от круга будет удалена ее проекция, вплоть до бесконечности, что явно неприемлемо, так как все точки стереографической проекции должны находиться в пределах круга проекций.

Практически для решения абсолютного большинства структурных задач можно ограничиться стереографическими проекциями точек, лежащих на одной (верхней) половине сферы. Если же в особом случае этого недостаточно, то пользуются двумя точками зрения; для верхней полусферы точкой S и для нижней полусферы точкой N. В этом случае, чтобы отличить точки, относящиеся к разным полусферам, их отмечают кружком (верхняя полусфера) или крестиком (нижняя полусфера).

Для построения стереографических проекций плоскости поступают в принципе так же, как и при построении проекции направления. Соответствующую плоскость в кристаллическом комплексе мысленно продолжают до пересечения со сферой проекций. След этого пересечения соединяют лучами зрения с точкой зрения (рис. 191). Геометрическое место точек пересечения круга проекции лучами зрения и есть стереографическая проекция плоскости.

Легко представить, что если плоскость горизонтальна, то в кристаллическом комплексе она совпадает с плоскостью проекций и пересекает сферу проекций по кругу проекций. Таким образом, сама окружность круга проекций и есть стереографическая проекция горизонтальной плоскости.

Стереографические проекции вертикальных плоскостей изображаются прямыми линиями — диаметрами круга проекций (рис. 191, *б*). Наклонные плоскости в стереографической проекции изображаются кривыми линиями — дугами, опирающимися на концы диаметров круга проекций (рис. 191, *а*).

Более простыми и удобными для количественных расчетов оказываются проекции полярного комплекса. В этом случае при построении проекции плоскости пользуются не самой плоскостью, а нормалью к ней.

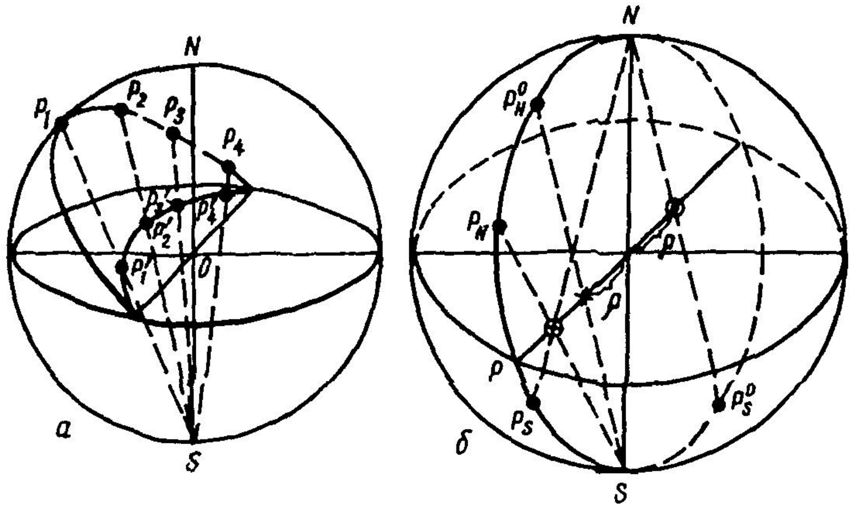


Рис. 191. *Стереографическая проекция плоскости*

Такие стереографические проекции полярного комплекса называют в литературе *гномостереографическими проекциями.*

Гномостереографическую проекцию плоскости строят так же, как стереографическую проекцию направления. Нетрудно теперь понять следующие простые закономерности гномостереографических проекций.

Гномостереографические проекции плоскостей изображаются точками.

Гномостереографические проекции горизонтальных плоскостей изображают точкой, находящейся в центре круга проекций (так как все нормали к ним пересекают сферу в точке N, а стереографическая проекция N лежит в центре круга проекций).

Гномостереографические проекции вертикальных плоскостей изображаются точками, лежащими на окружности круга проекций.

Гномостереографические проекции наклонных плоскостей изображают точками внутри круга проекций. Чем круче наклон плоскости (чем меньше угол между плоскостью и осью проекций), тем дальше находится точка от центра круга проекций.

В геометрической и структурной кристаллографии при решении ряда задач необходимо строить стереографические проекции элементов симметрии кристалла или решетки. Проекции осей симметрии получаются так же, как и стереографические проекции направлений, а проекции плоскостей симметрии — как стереографические проекции плоскостей в кристаллическом комплексе.

Выходы осей симметрии на проекции изображают особыми знаками, отражающими порядок соответствующей оси симметрии: для оси 6-го порядка — шестиугольник; 4-го — квадрат; 3-го — треугольник;

2-го — эллипс. Наличие центра симметрии отмечают знаком C у центра проекций. Поворотные оси изображают черными многоугольниками, инверсионные — контурными. О символах более подробно см. приложение 59.

Если на стереографической проекции показывают проекции плоскостей симметрии, то их обычно отмечают двойными линиями, чтобы отличить от проекций других плоскостей.

На рис. 192 показана стереографическая проекция элементов симметрии куба для случая, когда с осью проекций совпадает ось симметрии 4-го порядка.

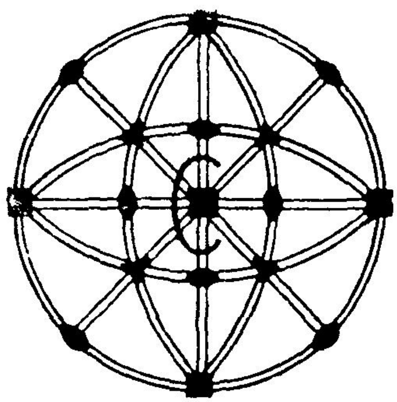


Рис. 192. Стереографическая проекция элементов симметрии куба

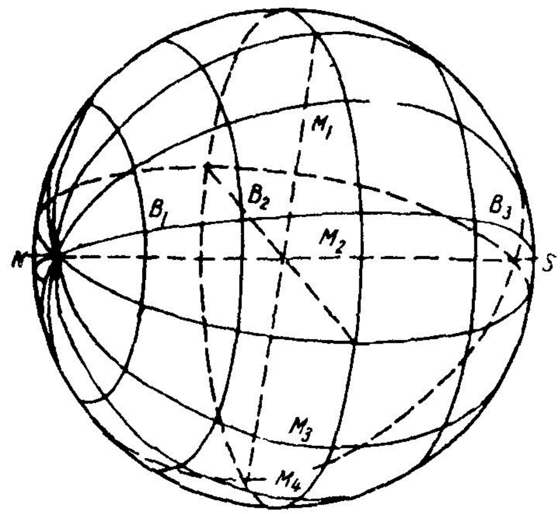


Рис. 193. К построению сетки Вульфа

Ясно, что для другой ориентировки кристалла проекция будет выглядеть иначе.

Стереографическая проекция позволяет в наглядной форме изобразить кристаллы или кристаллическую решетку с их элементами симметрии, а также их ориентировку в пространстве. Кроме того, они позволяют относительно легко проводить количественные расчеты угловых соотношений между направлениями (плоскостями) в кристалле, определять ориентировку кристаллов, выявлять плоскости двойникования и т. д.

Такие расчеты проводят с помощью сетки, предложенной одним из основателей рентгенографии, крупнейшим русским кристаллографом Ю. В. Вульфом и получившей название сетки Вульфа (см. рис. 193 и приложение 40).

Сетка Вульфа, построение которой поясняется на рис. 193, представляет собой стереографическую проекцию системы меридианов и параллелей, нанесенных на сферу (глобус) при условии, что плоскость проекции *ПП* проходит через линию, соединяющую северный N и южный S полюсы сферы (глобуса). Система меридианов, проходящих через северный и южный полюсы, соединяет все точки равной долготы, представляя следы пересечения сферы плоскостями M, проходящими через центр сферы (как в кристаллическом комплексе) и имеющими различные углы наклона относительно плоскости, проходящей через нулевой меридиан. Параллели, концентрически расположенные вокруг северного и южного полюсов, соединяют точки равной широты, представляя следы пересечения сферы плоскостями B, перпендикулярными оси $N - S$, равноотстоящими друг от друга, из которых только одна проходит через центр сферы (эти параллельные круги называют еще малыми кругами) (см. рис. 193).

Обычные стандартные сетки Вульфа имеют диаметр 20 *см*, меридианы и широты проводят через 2°.

Они обеспечивают проведение всех расчетов и построений с точностью до 1°.

Если плоскость проекций расположить так, чтобы она была перпендикулярна оси *NS* (оси, проходящей через северный и южный полюсы), то проекция меридианов и широт будет иметь вид, показанный на рис. 95. Такая сетка была предложена известным кристаллографом Болдыревым и также находит применение (приложение 41).

С помощью сетки Вульфа можно легко определять угловые соотношения между плоскостями или направлениями в кристалле, изображенными стереографическими или гномостереографическими проекциями.

Для практического пользования сеткой на листе кальки вычерчивают круг такого же диаметра, как и круг сетки Вульфа, представляющий круг проекций.

На этот круг проекций (кальку) наносят проекции плоскостей и направлений, которые получают с помощью рентгенографических или иных данных. Затем центр кальки совмещают с центром сетки Вульфа и, концентрически вращая кальку вокруг этого центра (не смещая его), добиваются определенных положений, позволяющих вести количественные расчеты.

Для таких количественных расчетов необходимо знание следующих правил и свойств стереографических проекций, а также приемов решения типовых задач.

Угловые (сферические) координаты направлений

Положение любой точки (проекции направления) на круге проекции может быть указано с помощью угловых координат — углов φ (азимут) и ρ (широта) (рис. 194). На сфере им соответствуют сферические координаты φ и ρ (рис. 195).

Как показано на рис. 194, угол ρ отсчитывается от центра круга проекций в радиальном направлении до окружности круга проекций и меняется в пределах от 0 до 90°.

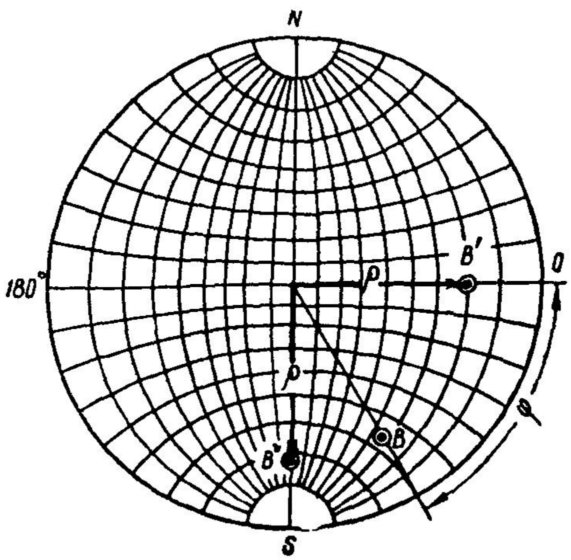


Рис. 194. Построение точки по ее угловым координатам

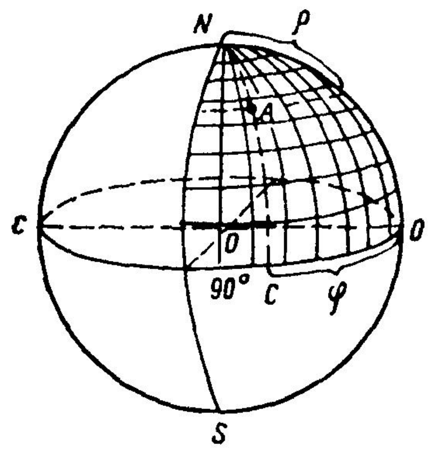


Рис. 195. Построение точки по ее сферическим координатам

Если положение точки на кальке совпадает с вертикальным или горизонтальным диаметром сетки Вульфа, то угол ρ отсчитывается непосредственно по этому диаметру. Если положение точки на кальке не совпадает с каким-либо из этих диаметров, то следует концентрическим вращением кальки вывести искомую точку на один из этих диаметров и отсчитать по нему угол ρ.

Угол φ отсчитывается вдоль окружности круга проекций от правого конца горизонтального диаметра, где помещается начало отсчета $\varphi=0$, по часовой стрелке, меняясь от 0 до 360°.

Если положение точки на кальке совпадает с окружностью круга проекций, то угол φ отсчитывается непосредственно. Если точка находится внутри круга проекций, то через нее необходимо провести радиус на круге проекций или, что проще, концентрическим поворотом кальки привести точку на горизонтальный диаметр. Угол между точкой пересечения радиуса с окружностью и точкой начала отсчета равен углу φ искомой точки.

Определение кристаллографических индексов плоскости по ее гномостереографической проекции, заданной угловыми (сферическими) координатами

Между индексами плоскости (hkl) и сферическими координатами φ и ρ нормали к этой плоскости существует строгая математическая зависимость. Вид зависимости различен для разных сингоний и расположений кристалла. Для кубической сингонии при условии, что одна из плоскостей куба (001) находится в плоскости проекций:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{k},$$

$$\operatorname{tg}\rho = \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{l},$$

$$h:k:l = \sin\varphi : \cos\varphi : \operatorname{ctg}\rho.$$

Связь между положением круга на сфере и его стереографической проекцией

Стереографические проекции любых кругов на сфере проекций представляют собой также круги на плоскости проекций. Поэтому и меридианы и параллели сетки Вульфа — дуги окружности.

Связь между положением проекций взаимнопараллельных плоскости и направления

Если искомое направление лежит в данной плоскости, то точка, изображающая проекцию этого направления, должна находиться на дуге, изображающей стереографическую проекцию данной плоскости.

Определение угла между двумя направлениями по стереографическим проекциям

Два пересекающихся направления (только с таким направлением мы и имеем дело в кристаллическом или полярном комплексе) всегда располагаются в одной плоскости. В этой плоскости лежит и угол, равный углу между двумя направлениями. Чтобы определить этот угол по сетке Вульфа, необходимо, чтобы обе точки, изображающие проекции этих направлений, лежали на линии, изображающей проекцию данной плоскости, т. е. на проекции одной из дуг большого круга. Проекциями плоскостей, проходящих через центр сферы (секущих сферу по большим кругам), являются только меридианы или экваториальная широта. Остальные широты этому требованию не удовлетворяют. Отсюда

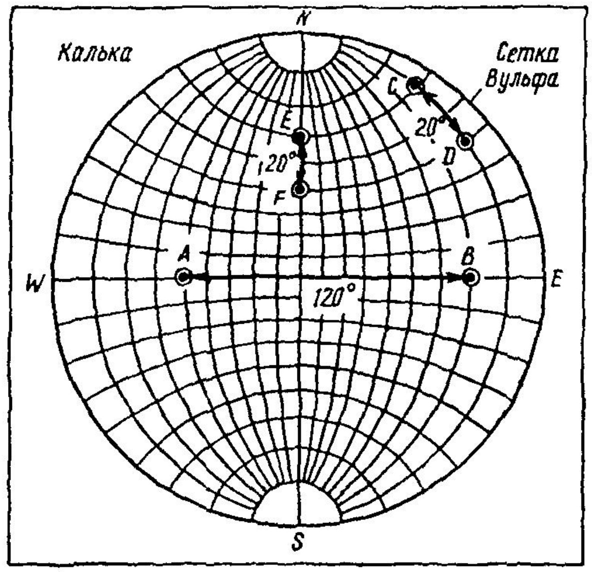


Рис. 196. Определение угла между плоскостями по их гномостереографическим проекциям

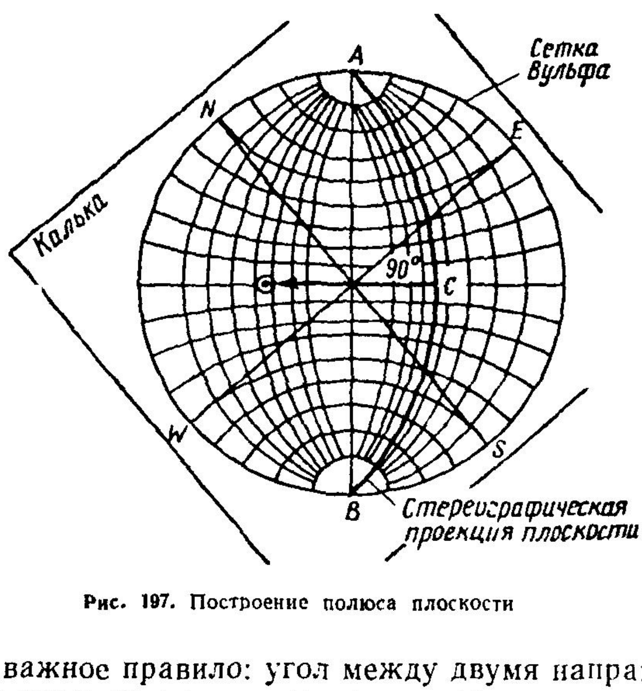
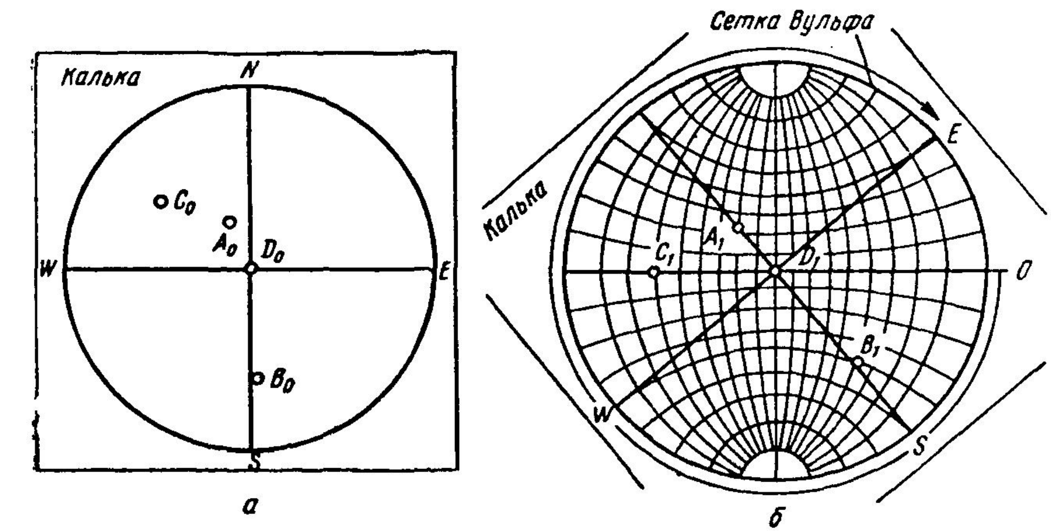


Рис. 197. Построение полюса плоскости

следует очень важное правило: угол между двумя направлениями, изображенными их проекциями, т. е. двумя точками, равен разности их широт, если они лежат на одном меридиане или разности их долгот, если они располагаются на экваторе. Чтобы определить угол между проекциями двух направлений, нужно концентрическим вращением кальки установить их на один меридиан или на экватор и отсчитать угол между ними по сетке.

Определение угла между двумя плоскостями по гномостереографическим проекциям

Такое определение выполняют в соответствии со сказанным для стереографических проекций направлений, так как гномостереографические проекции плоскостей представляют собой прямые стереографические проекции нормалей к плоскостям, а угол между двумя плоскостями равен углу между нормалями к ним (рис. 196).



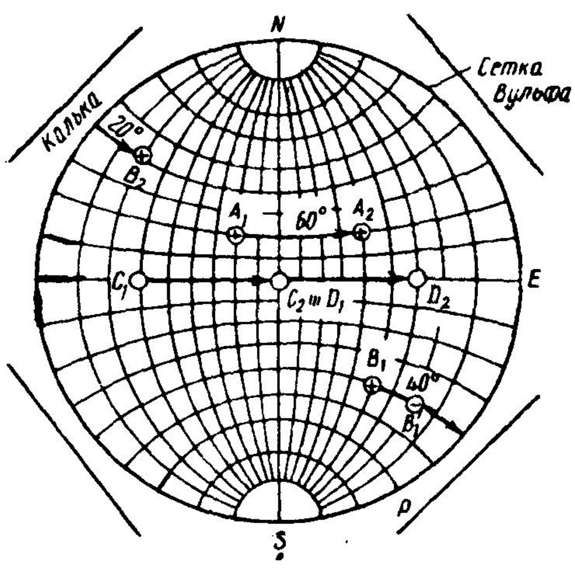


Рис. 198. Поворот плоскостей проекции:

а — исходное положение; *б* — поворот вокруг вертикальной оси; *в* — поворот вокруг оси, лежащей в плоскости проекций

Построение гномостереографической проекции плоскости по ее стереографической проекции (построение нормали к плоскости)

Если направление перпендикулярно двум пересекающимся направлениям, лежащим в данной плоскости, то оно перпендикулярно и самой плоскости.

Практически концентрическим вращением кальки добиваются того, чтобы данная стереографическая проекция плоскости совпала с одним из меридианов сетки Вульфа. В этом положении от точки пересечения проекцией плоскости экватора отсчитываем по экватору 90°. Найденная точка и есть гномостереографическая проекция (полюс) данной плоскости (рис. 197).

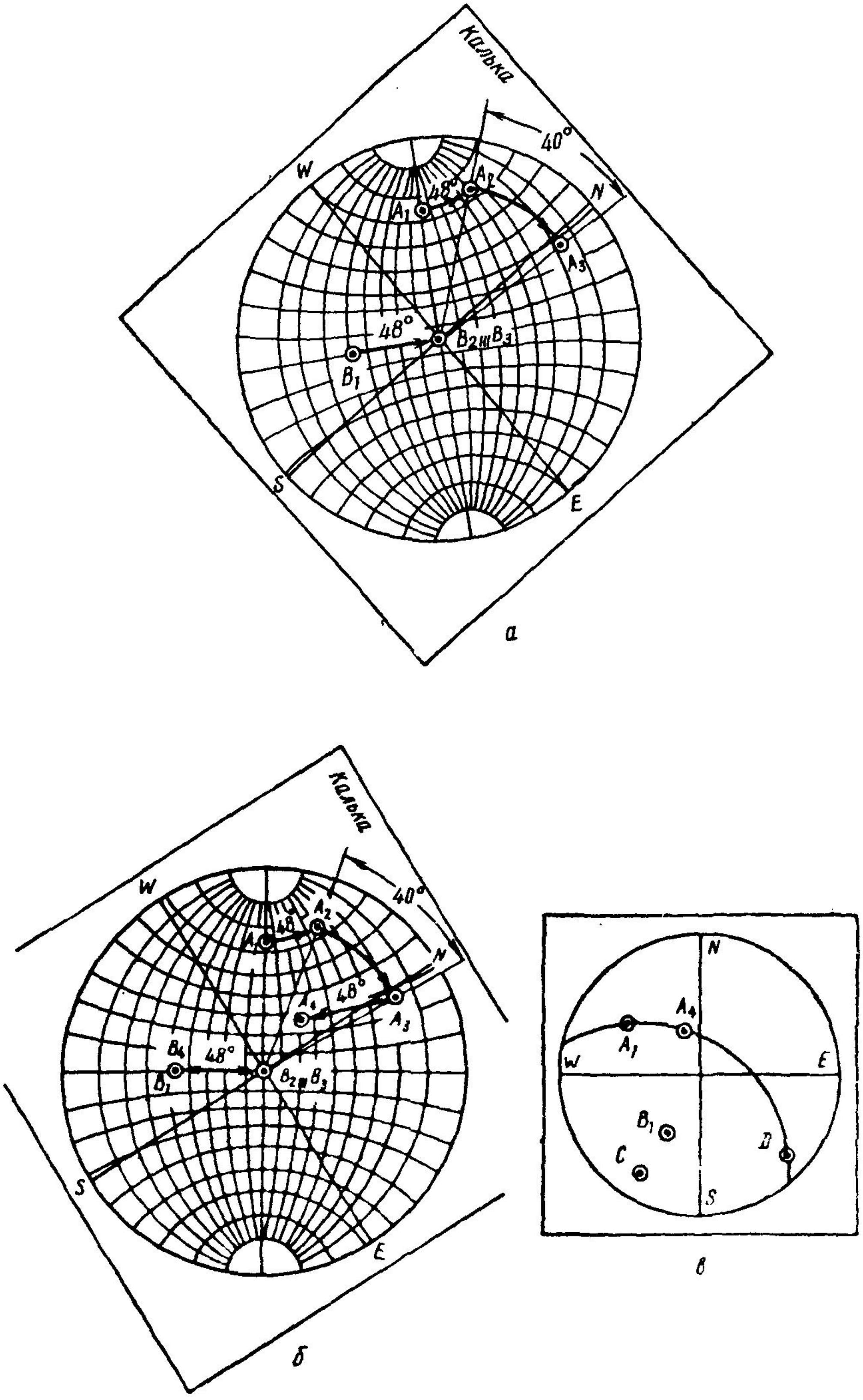


Рис. 199. Поворот осей проекций:

а — исходное положение и поворот плоскости проекций; *б* — возвращение осей проекций в исходное положение; *в* — построение траектории движения

Определение проекций плоскостей кристалла при изменении плоскости проекций

Пусть даны гномостереографические проекции четырех плоскостей (точки $A_0B_0C_0D_0$) при данной ориентировке кристалла, когда с осью проекций совпадает плоскость D (рис. 198). Найти проекции этих же плоскостей при таком изменении ориентировки кристалла, когда с плоскостью проекций совпадает плоскость C.

Задача состоит в последовательном двухкратном повороте заданной плоскости сперва около вертикальной оси проекций (осуществляется поворотом кальки на необходимый угол) (рис. 198, *б*), а затем около оси, находящейся в плоскости проекций (совершается по широтам или экватору сетки Вульфа) (рис. 198, *в*), до совмещения заданной оси с центром проекций:

Практически поступают следующим образом:

1) концентрическим вращением кальки выводят точку C на экватор;

2) отсчитывают в новом положении угловое расстояние от точки C до центра сетки;

3) переносят точку C в центр кальки, а остальные точки на угол α по широтам в том же направлении.

Если при этом какая-либо из точек окажется за пределами круга, например точка B (рис. 198, *а*), т. е. в нижней половине сферы, то в верхнюю полусферу должна выйти точка пересечения со сферой другого конца данного направления (точка B_2), отстоящая на 180° от точки, ушедшей в нижнюю часть сферы. Для построения ее проекции после поворота необходимо переместить точку B по ширине до пересечения с внешней окружностью сетки Вульфа, скажем на угол $\beta < \alpha$.

Затем из полученного положения провести прямую через центр сетки и по другую сторону от центра перемещать точку по симметричной широте в том же направлении на угол γ так, чтобы $\gamma + \beta = \alpha$. Полученная точка B_2 и будет искомой.

Вращение проекций плоскостей около наклонной оси вращения на угол α (рис. 199)

Дана гномостереографическая проекция плоскостей A и B (рис. 199, *а*). Нужно повернуть плоскость A на 40° вокруг нормали к плоскости B. Показать новое положение проекции плоскости A и траекторию ее движения.

Операцию совершают в пять приемов:

1. Концентрическим поворотом кальки выводят заданную ось (B) на экватор, определяют ее расстояние от центра (рис. 199, *а*).

2. Переносят заданную ось проекций в центр проекций, а остальные проекции — на соответствующий угол по широтам.

3. Концентрическим поворотом кальки смещают все проекции на необходимый угол α.

В этом положении необходимый поворот сделан при плоскости проекций, выбранной перпендикулярно заданной оси. Для окончательного решения необходимо вернуть заданную ось в прежнее положение.

4. Возвращают ось вращения в первоначальное положение, смещая проекции на угол α в обратном направлении (рис. 199, *б*).

5. Траектория движения проекции A около проекции B есть окружность. Угловой радиус этой окружности равен углу между проекциями A и B. Окружность траектории движения проекции A строят по

двум принадлежащим ей точкам A_1 и A_4 и третьей D, находящейся от точки B на том же угловом расстоянии (рис. 199, *в*). Одновременно определяют проекцию центра окружности C, не совпадающей с осью поворота B.

Построение зоны (в гномостереографической проекции)

Зона — совокупность плоскостей кристалла, параллельных определенному направлению (оси зоны), или иначе — совокупность плоскостей, перпендикулярных определенной плоскости. Поэтому проекции плоско-

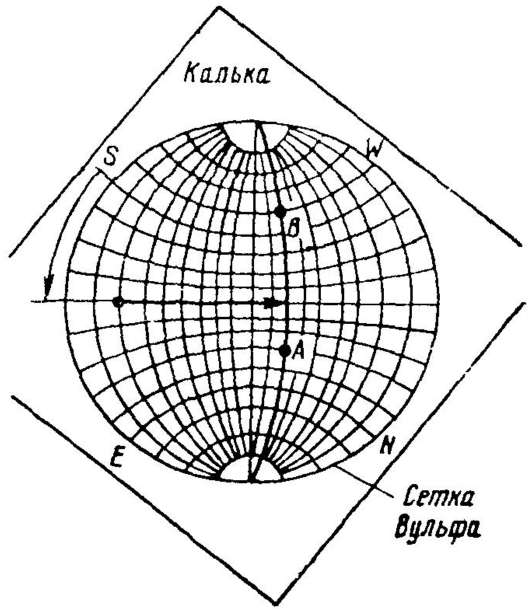


Рис. 200. Построение зоны

стей, принадлежащие зоне, располагаются на угловом расстоянии 90° от проекции, изображающей ось зоны, находятся на одном меридиане сетки Вульфа, если проекция оси зоны располагается на экваторе.

Практически если заданы две плоскости и надо найти их зону и ее ось, то следует концентрическим поворотом кальки установить проекции плоскостей на меридиан (рис. 200) и от точки его пересечения с экватором отсчитать 90° к центру проекций. Полученная на экваторе точка и будет проекцией оси зоны, так как отстоит на 90° от любой из точек меридиана.

Построение стандартных проекций

При изучении ориентировок кристалла, текстур и др. пользуются так называемыми стандартными проекциями, наглядно изображающими взаимное расположение важнейших плоскостей кристалла по отношению друг к другу и к внешним координатным осям при данной ориентировке. Такие стандартные проекции можно построить, совместив какую-либо плоскость кристалла с малыми индексами (001), (110), (111), (112) для кубических кристаллов, (0001) для гексагональных с плоскостью проекций и определив угловое положение других плоскостей кристалла по отношению к выбранной плоскости проекций. Для кубической сингонии эти углы можно рассчитать или найти в табли-